

Résumé ma thèse

“Energetic-Lattice based optimization”

B. Ravi Kiran

Lorsqu’on commence une thèse, on sait en général d’où l’on part, mais lorsqu’elle est terminée, le chemin qu’on a parcouru et les résultats auxquels on a abouti surprennent tout le monde, y compris l’intéressé.

Ma thèse est partie des hiérarchies de segmentation en analyse d’image. J’ai fait connaissance de mon futur directeur de thèse lors d’un cours de morphologie mathématique qu’il donna à Bangalore en novembre 2011. Il avait récemment extrait d’une forêt d’algorithmes la notion de croissance hiérarchique [28], et subodorait qu’une piste nouvelle s’ouvrait à la morphologie mathématique¹. Il cherchait un thésard et un financement. Je fus le premier, et l’ESIEE se chargea du second. La thèse a été soutenue dans le cadre de l’université Paris-Est le 31 octobre 2014.

1 Introduction

1.1 Sujet de la thèse

On appelle analyse d’image l’étude quantitative des régionalisations qui se déploient dans l’espace visuel ou physique, ou encore géographique. Ces espaces sont classiquement modélisés par \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^3 , ou \mathbb{Z}^2 et \mathbb{Z}^3 , disons E , et les phénomènes qui s’y déploient par des fonctions f , scalaires ou vectorielles, et qui dépendent parfois du temps. L’opération de segmentation d’une image consiste à partitionner son espace de définition E en régions où f est homogène pour des critères de taille, de forme, de mouvement, etc.. Comme ces critères s’expriment à l’aide de paramètres numériques, on aboutit à des familles de segmentations $\{\pi_i, i \in I\}$. La plus courante, et aussi la plus simple, est la hiérarchie H où les partitions π_i sont ordonnées selon l’ordre du raffinement, c’est à dire où $\pi_i \leq \pi_j$ signifie que chaque classe de π_j contient une classe de π_i .

Un certain nombre de questions peut être formulé à partir d’une hiérarchie H . Si l’on entend par coupe de H toute partition π de E dont les classes sont toutes prises dans H , quelle est la coupe la plus représentative de l’image f initiale? Ou encore: comment assujettir cet optimum à une contrainte? Par exemple si l’image, électronique, est destinée à être transmise, comment faire intervenir dans la minimisation le coût maximal (en nombre de bits) qu’on s’autorise à dépenser pour la transmission? Ou encore: comment simplifier certains niveaux

¹La morphologie mathématique est l’étude de phénomènes régionalisés par des méthodes qui placent l’accent sur les relations d’ordre, donc sur les treillis.

en regroupant des classes dans les partitions π_i tout en préservant leur structure hiérarchique? Ou enfin: comment introduire dans la hiérarchie une information complémentaire, comme par exemple la donnée du contour manuel de certaines régions?

Voilà les principales questions que j'ai abordées dans ma thèse.

1.2 Notions de base: hiérarchies, énergies, coupes

Rappelons quelques notions et précisons quelques notations. On appelle partition partielle $\pi(S)$ de support S (en bref p.p.) toute partition d'une partie S de E [26], et la famille de toutes les p.p. de E se note $\mathcal{D}(E)$. Le symbole \sqcup désigne la concatenation de classes dans les p.p., i.e. $\pi(S) = S_1 \sqcup S_2 \Leftrightarrow S_1 \cup S_2 = S$ and $S_1 \cap S_2 = \emptyset$.

Selon un résultat très classique [7], une famille indexée d'ensembles $\{S_i(x), x \in E, 0 \leq i \leq n\}$ engendre les classes d'une hiérarchie si et seulement si

$$i \leq j \text{ and } x, y \in E \Rightarrow S_i(x) \subseteq S_j(y) \text{ or } S_i(x) \supseteq S_j(y) \text{ or } S_i(x) \cap S_j(y) = \emptyset. \quad (1)$$

On représente la hiérarchie $H = \{\pi_i, i \in [0, n]\}$ par un dendrogramme comme celui de la figure 1, aussi appelé arbre, d'élément minimal π_0 la partition en feuilles, et maximal la racine, c'est à dire la partition $\{E\}$ de E en une seule classe. Toute classe S de niveau i de la hiérarchie est le support d'une p.p. $\pi(S)$ au niveau $i - 1$, de classes T_j , i.e. $S = \sqcup T_j$. On dit alors que les T_j sont les fils de père S .

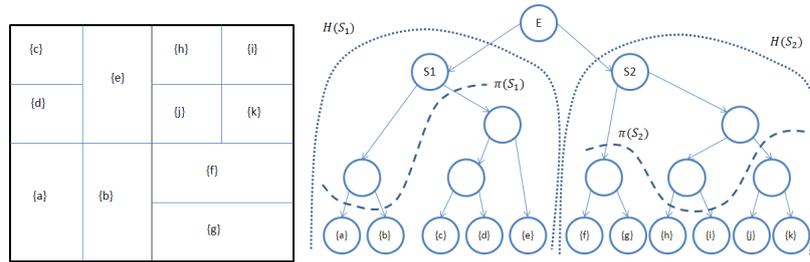


Figure 1: *Exemple d'une partition (à gauche) et de son dendrogramme (à droite). Chaque classe S_1 et S_2 est racine d'une sous-hiérarchie, et $H(S_1) \sqcup H(S_2)$ est la hiérarchie de racine $\{E\}$. Deux coupes $\pi(S_1)$ de $H(S_1)$ et $\pi(S_2)$ de $H(S_2)$ sont figurées; $\pi(S_1) \sqcup \pi(S_2)$ est la coupe résultante de H .*

Une énergie $\omega : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^+$ est une fonction positive ou nulle définie sur la famille des partitions partielles. On construit souvent cette énergie pour la p.p. $\pi(S)$ par composition des énergies de ses classes, et en faisant en sorte que sa valeur soit un indice de qualité relativement à l'image initiale f . Toute coupe de H possède donc une énergie, et la ou les coupes d'énergie optimale-maximale ou minimale selon le cas- sont les plus représentatives de f .

1.3 Historique sur les coupes d'énergie optimale

La recherche de coupe d'énergie minimale apparait avec les travaux de L. Breiman et al. dans les années 1980 à propos de questions de classification et de regression [8]. Sa méthode

consiste à partitionner un espace de paramètres en rectangles et à progressivement affiner chaque rectangle en le divisant en deux autres plus petits, ce qui détermine une hiérarchie. Une énergie est définie sur les classes rectangulaires, et étendue à leurs p.p. par sommation sur les classes.

Breiman obtient la coupe d'énergie minimale en parcourant la hiérarchie à partir des feuilles dans un ordre lexicographique qui fait toujours apparaître les fils avant leurs pères. Lorsqu'un père S est atteint, on compare son énergie à celle de la p.p. $T_1 \sqcup T_2$ de ses fils. Si cette dernière est plus faible, on remplace S par $T_1 \sqcup T_2$, et en cas d'égalité on laisse S , et on poursuit le parcours lexicographique jusqu'à la racine. La coupe d'énergie minimale se construit donc en une passe de lecture des classes.

Dans [27], Ph. Salembier et L. Garrido étendent la démarche de Breiman aux hiérarchies de segmentation d'images et l'appliquent à l'optimisation sous contrainte que nous verrons plus loin (voir aussi [11]). Dans sa thèse en 2003, L. Guigues reprend la même ligne d'idées, et fait dépendre l'énergie, donc la coupe minimale aussi, d'un paramètre d'échelle λ . Il étudie sous quelle conditions les coupes minimales sont ordonnées pour le raffinement, et forment à leur tour une hiérarchie [14] [15].

Pour tous ces auteurs, l'énergie d'une p.p. est toujours la somme de celles de ces classes. Or on trouve dans la littérature d'autres lois de composition, par supremum [31],[1], ou par infimum [23] par exemple. D'où la double question: dans quelles conditions existe-t-il une coupe minimale (ou maximale) et dans quelles conditions est-elle unique?

2 Treillis énergétiques

2.1 Caractérisation par énergies grimpantes

Dans un contexte de partitions, l'unicité est loin d'être une exigence subalterne. Une petite image de 5 par 5 pixels peut déjà être partitionnée de 10^{18} manières différentes, et ce nombre augmente exponentiellement avec chaque pixel supplémentaire (nombres de Bell [6]). En revanche, le domaine de variation des énergies n'excède jamais en pratique quelques milliers, ce qui veut dire que la correspondance entre énergie et partition est loin d'être bi-univoque. Comment s'assurer de minima uniques? La structure algébrique de treillis est ici l'outil qui convient.

Un ensemble ordonné constitue un treillis quand toute famille finie de ses éléments y admet un plus grand et un plus petit élément. Quand la propriété s'étend aux familles infinies, on parle de treillis complet. Il contient en particulier le plus grand et le plus petit de tous les éléments. Par exemple, l'ensemble des coupes de H , muni de l'ordre par raffinement, forme un treillis complet que l'on note $\Pi(\leq, H)$. Son plus grand élément est $\{E\}$ et le plus petit la partition π_0 des feuilles.

Ce treillis $\Pi(\leq, H)$ est indépendant de toute énergie, mais rien ne nous interdit de munir les coupes d'un autre ordre, dépendant de ω et qui conduise à un treillis plus adapté. Dans ce but, nous avons besoin des deux axiomes de singularité et de h -croissance [28], [29]:

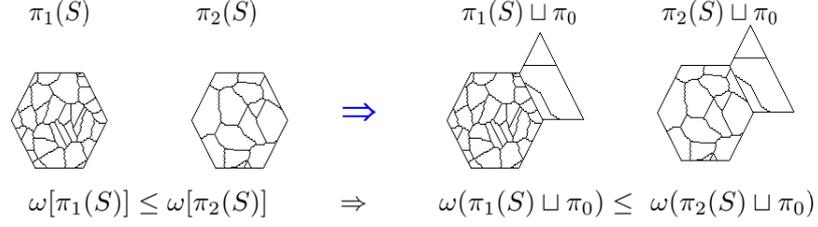


Figure 2: *Illustration de la h-croissance d'une énergie.*

1 L'énergie ω est singulière, quand pour toute p.p. $\pi(S)$ il vient

$$\omega(\{S\}) \neq \omega(\pi(S)), S \subseteq E,$$

elle est hiérarchiquement croissante, ou h-croissante, quand

$$\omega(\pi(S)) \leq \omega(\pi'(S)) \Rightarrow \omega(\pi(S) \sqcup \pi_0) \leq \omega(\pi'(S) \sqcup \pi_0), \quad \forall S \subseteq E. \quad (2)$$

Une énergie à la fois singulière et h-croissante est dite grimpante,

La croissance hiérarchique signifie que si l'énergie d'une p.p. de S est inférieure ou égale à celle d'une autre p.p. de S , cet ordre est préservé lors de la concaténation de S avec toute autre p.p., comme visualisé en figure 2. Lorsque les inégalités mises en jeu dans l'implication (2) sont strictes, on parle de h-croissance stricte.

'nonclimbing.png';file-properties

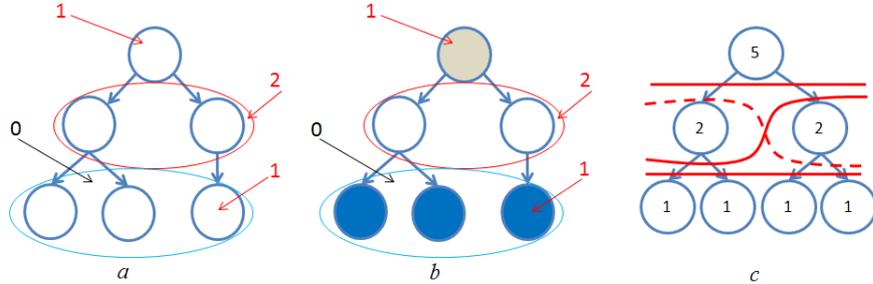


Figure 3: a) et b) Hiérarchie accompagnée de l'énergie $\omega[\pi(S)] = 1$ si la p.p. $\pi(S)$ a une classe, $\omega[\pi(S)] = 2$ si elle en a 2, et $\omega[\pi(S)] = 0$ sinon. L'énergie ω est singulière, mais pas h-croissante, et la coupe minimale (en sombre dans b) diffère de celle donnée par programme dynamique (en clair dans b). En c) une énergie additive, donc h-croissante, mais où l'on supprime la singularité, d'où quatre coupes minimales.

Les énergies grimpantes permettent de construire des treillis dont le rôle est essentiel pour l'optimisation (section 1.4.2 dans [22], section 3 dans [29])

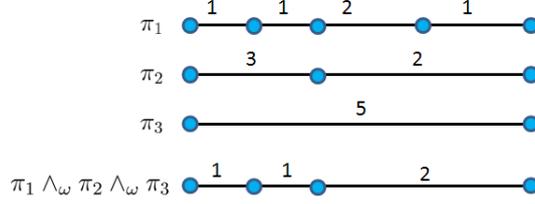


Figure 4: Trois coupes d'une hiérarchie. Les énergies ω , indiquées au dessus des classes, sont composées par addition. On a $\pi_3 \preceq_\omega \pi_2$ et $\pi_3 \preceq_\omega \pi_1$, mais π_1 et π_2 n sont pas comparables.

2 Soit Π la famille des coupes d'une hiérarchie H , et ω une énergie. Etant données deux coupes $\pi_1, \pi_2 \in \Pi$, la partition π_1 est dite moins énergétique que π_2 , et l'on écrit $\pi_1 \preceq_\omega \pi_2$ quand dans chaque classe de $\pi_1 \vee \pi_2$ l'énergie de la partition partielle de π_1 est inférieure ou égale à celle de π_2 :

$$\pi_1 \preceq_\omega \pi_2 \Leftrightarrow \{S \in \pi_1 \vee \pi_2 \Rightarrow \omega(\pi_1 \sqcap \{S\}) \leq \omega(\pi_2 \sqcap \{S\})\} \quad (3)$$

La relation \preceq_ω induit un ordre, appelé ordre énergétique, si et seulement si l'énergie ω est singulière.

Si de plus ω est h -croissante, et seulement dans ce cas, la famille des coupes de H forme un treillis complet $\Pi(\omega, H)$ pour l'ordre énergétique \preceq_ω .

La figure 3 montre, à l'aide de deux contre-exemples, comment le théorème est pris en défaut quand un des deux axiomes de la définition 1 n'est plus vérifié. On note $\pi^* = \pi^*(\omega)$ la coupe minimale du treillis énergétique $\Pi(\omega, H)$. La figure 4 illustre à la fois l'ordre et l'infimum énergétiques

Bien évidemment, le théorème 2 s'applique non seulement à la hiérarchie de racine $\{E\}$, mais aussi bien à toute sous-hiérarchie ayant pour racine une classe quelconque S de H , ce qui conduit au corollaire suivant (prop. 1.18 dans [22]):

3 Soient une énergie grimpante ω et H une hiérarchie. Pour chaque classe S de H ayant p fils $T_1..T_p$ de coupes minimales $\pi_1^*.. \pi_p^*$, il existe une coupe minimale de la sous-hiérarchie de racine S . C'est soit la coupe $\pi_1^* \sqcup \pi_2^*.. \sqcup \pi_p^*$, soit la classe-partition $\{S\}$ elle-même:

$$\omega(\pi^*(S)) = \min\{\omega(\{S\}), \omega(\pi_1^* \sqcup \pi_2^*.. \sqcup \pi_p^*)\} \quad (4)$$

Le corollaire 3 n'est rien d'autre que l'expression théorique de l'algorithme de programmation dynamique de Breiman.

2.2 énergies h -croissantes par normes de Minkowski.

Les énergies utilisées par Breiman, Salembier et Guigues [8], [27], [15] les font entrer dans le cadre du théorème 2 parce qu'elles sont additives. Pour construire d'autres énergies grimpantes, il est commde d'utiliser les normes de Minkowski comme lois de composition entre ensembles et partitions partielles. Si $\{T_u, 1 \leq u \leq q\}$ sont les q fils qui partitionnent la classe

S , i.e. $\pi(S) = T_1 \sqcup \dots \sqcup T_u \dots \sqcup T_q$, on peut partir d'une énergie quelconque ω sur les ensembles S et l'étendre de $\mathcal{P}(E)$ aux p.p. $\mathcal{D}(E)$ par la relation classique de Minkowski

$$\omega(\pi(S)) = \left[\sum_{u \in [1, q]} \omega(T_u)^\alpha \right]^{\frac{1}{\alpha}}. \quad (5)$$

L'énergie résultante est h -croissante (sect. 1.6 dans [22]). Même pour les valeurs de $\alpha \leq 0$ pour lesquelles l'expression de Minkowski n'est plus une norme, la loi de composition (5) engendre encore des énergies h -croissantes. Voici quelques unes de ces lois, dont certaines apparaissent dans la littérature, mais sans liens entre elles:

α	$\omega(T_i)$ Composition Law	Applications
$-\infty$	infimum	Ground truth énergies [23]
-1	somme harmonique	-
0	nombre des classes	CART [8]
$+1$	somme	Salembier-Garrido, Guigues [27], [15]
$+2$	somme quadratique	-
$+\infty$	supremum	Valero [32], Veganzones [33], Soille [31]

Signalons enfin quelques compositions supplémentaires

4 *Etant donnée une famille $\{k_j, j \in J\}$ de poids positifs, la somme pondérée $\sum k_j \omega_j$ et le supremum $\bigvee k_j \omega_j$ d'énergies h -croissantes sont à tour h -croissants.*

3 Deux exemples

Voici deux exemples d'énergies additives destinés à montrer comment le choix de telle ou telle fonction ω gouverne l'extraction de tel ou tel aspect comme la couleur, des textures, etc.(sect. 3.1. de [22]). Partons de l'énergie proposée dans [27], et modifions la par adjonction de termes supplémentaires. Une hiérarchie H de l'image de deux canards a été obtenue par lignes de partage des eaux de la luminance $l = (r+g+b)/3$. On cherche la meilleure coupe pour un taux de compression de 20. Dans chaque classe S de H , la simplification consiste à remplacer la fonction f par ses valeurs moyennes dans les trois canaux $m(S) = \frac{\sum_{x \in S} x}{\text{card}(S)}$. Les deux énergies (7) et (6) sont des cas particuliers du modèle énergétique de Mumford et Shah [20] [19].

Dans une première optimisation, l'énergie $\omega_{lum}(S)$ est somme d'un terme $\omega_\varphi(S)$ dit d'attache aux données, qui est l'erreur quadratique entre f et sa moyenne, et d'un second terme $\omega_\partial(S)$, dit de régularité, qui indique le cout du codage de la classe S , en prenant 2 bits pour chaque élément de frontière, et 24 bits pour coder $m(S)$:

$$\omega_{lum}(S) = \sum_{x \in S} \| l(x) - m(S) \|^2 + \lambda(24 + |\partial S|). \quad (6)$$

Le coût $\omega_\partial(\pi^*)$ de la coupe optimale décroît quand λ croît (prop. 2.8 de [22]), il suffit donc d'augmenter progressivement λ et de s'arrêter quand $\omega_\partial(\pi^*) \simeq$ nombre de pixels/20.

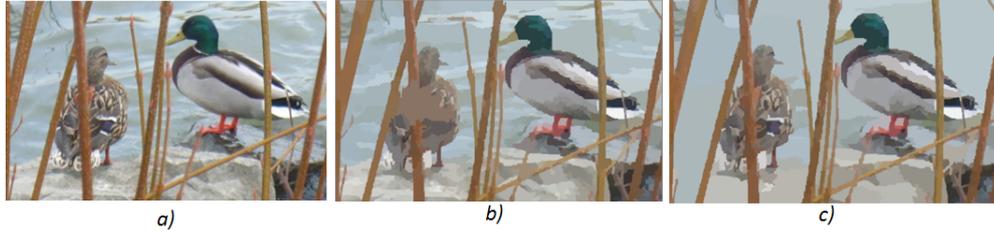


Figure 5: a) Image initiale de deux canards; b) et c) coupes optimales obtenues en utilisant la luminance et la chrominance.

Le résultat est indiqué en figure Fig. 5b, où l'on constate que la femelle a mal été segmentée. Cela suggère une seconde optimisation, où la luminance l de la relation (6) est remplacée par la chrominance c , i.e. par la projection du vecteur (r, g, b) sur le plan orthogonal à l'axe $(1, 1, 1)$ dans l'espace des trois couleurs. La nouvelle coupe optimale est montrée en figure 5c. Les deux canard sont mieux séparés du premier plan avec les joncs, ainsi que de la rivière. En revanche, cette dernière a perdu ses vaguelettes, qui ne se différiaient que par leur luminance.

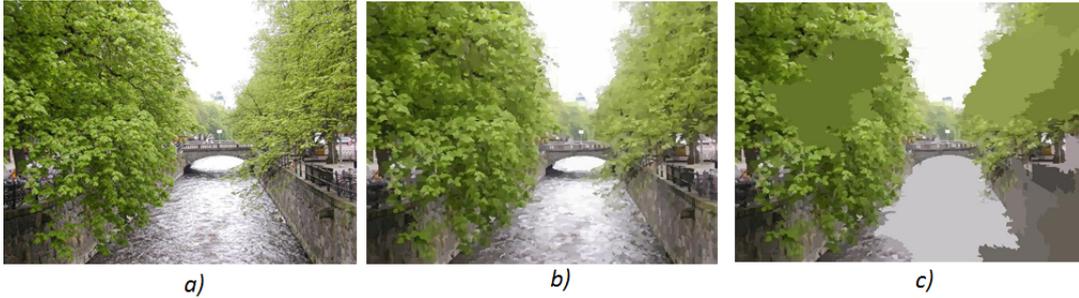


Figure 6: a) Rivière d'Uppsala; b) et c) coupes minimales de a) pour l'énergie (7), avec $\lambda = 100$, and pour $K = 10^{12}$ (b), et $K = 10^{14}$ (c).

Le second exemple porte sur la reconnaissance de zones texturées dans les arbres et les murs entourant la rivière d'Uppsala (Fig. 6). La nouvelle énergie $\omega_{textures}$ of Rel.(7) conserve les deux termes de la précédente, et y ajoute un troisième, sensible aux textures via la variance des surfaces des fils:

$$\omega_{textures}(S) = \sum_{x \in S} \|c(x) - m(S)\|^2 + \lambda(24 + |\partial S|) + \sum_{S' \in sons(S)} \frac{K}{\sigma^2(Area(S'))}, \quad (7)$$

Le troisième terme croit quand les surfaces des fils de S ont à peu près la même valeur. Les figures 6b and c montrent les coupes optimales pour deux valeurs du paramètre K , qui donnent plus ou moins d'importance à cette information texturale.

4 Tresses de partitions

Nous sommes systématiquement partis de hiérarchies pour trouver quelles axiomes imposer aux énergies afin de les rendre efficaces. Ce qui a conduit aux treillis énergétiques, dont les coupes optimales sont significatives (théorème 2). Mais réciproquement, si l'on part d'énergies dotées des deux axiomes de singularité et de croissance hiérarchique, on peut se demander quelles familles de partitions ont des ensembles de coupes qui forment des treillis énergétiques? C'est ici qu'interviennent les tresses (sections 1.3 et 1.4 de [22] et 2 de [24])

5 Soit $\Pi(E)$ le treillis des partitions de E pour l'ordre du raffinement, et H une hiérarchie d'éléments de $\Pi(E)$. Une tresse B de moniteur H est une famille dans $\Pi(E)$ telle que le supremum par raffinement de tout paire de partitions $\pi_1, \pi_2 \in B$ est une coupe de H autre que $\{E\}$ lui même:

$$\forall \pi_1, \pi_2 \in B \Rightarrow \pi_1 \vee \pi_2 \in \Pi(E, H) \setminus \{E\} \quad (8)$$

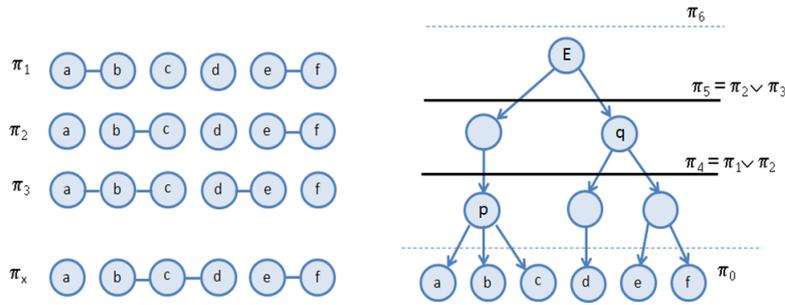


Figure 7: L'espace E est partitionné en feuilles $\pi_0 = \{a, b, c, d, e, f\}$. La famille $B = \{\pi_1, \pi_2, \pi_3\}$ forme un tresse de moniteur le dendrogramme. On remarque que π_1, π_2 ont pour père commun p mais que π_2, π_3 n'ont qu'un grand-père commun q . La famille $B \cup \pi_x$ n'est pas une tresse parce que $\pi_3 \vee \pi_x$ donne l'espace E entier.

En particulier les hiérarchies, La figure 7 montre un exemple très simple de tresse constituée par les trois partitions π_1, π_2, π_3 , avec le dendrogramme de la hiérarchie moniteur. On y remarque que certaines classes des partitions π_1 et π_2 ne sont ni incluses l'une dans l'autre ni disjointes, contrairement à ce qui se passe avec les hiérarchies, d'après l'équation 1.

4.1 Les tresses dans la littérature

Le modèle de tresses, qui est un des principaux apports de la thèse, apparait déjà implicitement dans la littérature en plusieurs situations. Elles se produisent chaque fois que différentes hypothèses de segmentation sont en concurrence, et qu'on reporte à une étape ultérieure la décision sur leur choix. On peut par exemple construire des segmentations par ligne de partage des eaux (LPE) où les bassins versants sont progressivement comblés suivant leur aire, ou suivant leur volume ou encore leur profondeur [18], [4], [12]. Ce point est illustré par un des deux exemples de la section 8.2. La tresse optimale choisit entre les diverses hiérarchies

la meilleure en chaque endroit. Plus généralement, les tresses apparaissent naturellement dans tous les problèmes de segmentation d'images multispectrales.

La notion de tresse ouvre l'accès aux méthodes probabilistes et aux ensembles aléatoires de G.Matheron [17]. Les *stochastic watersheds* de J.Angulo et D.Jeulin [2] créent des réalisations d'ensembles aléatoires par LPE d'une image f où l'on impose des points aléatoires en nombre fixé comme minima. La figure ?? illustre cette méthode.

L'étude du mouvement elle aussi peut être abordée du point de vue des tresses. Lorsqu'une caméra fixe prend un film, deux images successives contiennent certaines zones avec mouvement et d'autres, sans. Deux hiérarchies de segmentations par le même procédé produiront donc une tresse, qui peut servir à isoler les zones de changement, et exprimer plus finement les règles locales du mouvement.

4.2 Quelques propriétés des tresses

Les résultats théorique que nous venons de présenter s'étendent aux tresses, et les précisent. Ainsi le deuxième point de l'important théorème 2 devient

6 *Une famille de partitions forme un treillis complet $\Pi(\omega, H)$ pour l'ordre énergétique \preceq_ω si et seulement si elle coïncide avec les coupes d'une tresse.*

D'autres résultats, comme l'optimisation lagrangienne portent aussi bien sur les tresses que sur les hiérarchies. La notion de tresse complète donc celle de treillis énergétique, en déterminant son domaine de validité.

5 Croissance d'échelle

Comme l'avons vu en section 3 avec l'exemple des canards, les énergies apparaissent souvent comme des suites $\{\omega^\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ qui dépendent d'un index positif λ . Chacune d'elle donne lieu à une coupe optimale $\pi^{\lambda*}$, qui *a priori* n'a aucune raison d'être comparable avec les autres. Toutefois, si ces coupes étaient ordonnées nous disposerions d'une remarquable, et progressive, simplification de l'information. Et c'est l'axiome de la croissance d'échelle qui va le permettre (sections 1.7 de [22] et 5 de [29]).

7 *Une famille $\{\omega^\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ d'énergies sur les partitions partielles d'un ensemble E vérifie la croissance d'échelle quand pour tout support $S \subseteq E$ et toute partition partielle $\Pi(S)$ on a*

$$\lambda \leq \mu \text{ and } \omega^\lambda(S) \leq \omega^\lambda(\pi(S)) \Rightarrow \omega^\mu(S) \leq \omega^\mu(\pi(S)), \quad \pi \in \Pi(S), \quad S \in \mathcal{P}(E). \quad (9)$$

L'implication (9) signifie que quand λ augmente les ω^λ préservent le sens des différences énergétiques entre les classes de la hiérarchie, et leurs partitions partielles. En particulier, les familles $\{\omega^\lambda = \lambda\omega\}$, et $\{\omega^\lambda + \omega_0, \lambda \in \Lambda\}$ vérifient la croissance d'échelle. La notion croissance d'échelle a été étudiée par Guigues [14] [15] dans le cadre des énergies additives. La définition 7 ci-dessus généralise la notion, et suffit pour établir sa propriété majeure, à savoir [29]:

8 Soit $\{\omega^\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ une famille d'énergies grimpantes et vérifiant la croissance d'échelle, et soit π^{λ^*} (resp. π^{μ^*}) la coupe optimale de la hiérarchie H selon l'énergie ω^λ (resp. ω^μ). La famille $\{\pi^{\lambda^*}, \lambda \in \Lambda\}$ de ces coupes optimales engendre à son tour une hiérarchie H^* de partitions, car

$$\lambda \leq \mu \Rightarrow \pi^{\lambda^*} \leq \pi^{\mu^*}, \quad \lambda, \mu \in \Lambda. \quad (10)$$

En conséquence, on peut compresser au degré qu'on veut l'information contenue dans la tresse ou la hiérarchie initiales. Il suffit de fixer le nombre des λ , ou d'extraire d'entre eux les valeurs les plus pertinentes. La figure 8 montre un exemple de hiérarchies de coupes optimales. La famille $\{\omega^\lambda\}$ y est celle de l'équation (6) ci-dessus.



Figure 8: a) Image initiale d'épis de maïs; b) c) d) coupes optimales pour $\lambda = 0, 400,$ et 10.000 . Les périmètres des grains, qui sont de plus en plus pénalisants, disparaissent progressivement des coupes optimales.

En termes de calcul, l'algorithme des λ -coupes, de L. Guigues [15], parvient à construire la hiérarchie H^* en totalité à partir de deux parcours seulement des classes de H .

6 L'optimisation sous contrainte par lagrangien

Les familles d'énergies dépendant du scalaire λ de type

$$\omega(\lambda, S) = \omega_\varphi(S) + \lambda\omega_\partial(S) \quad \lambda \geq 0, S \in \mathcal{P}(E) \quad (11)$$

dont les équations (7) et (6) donnent des exemples rejoint des travaux classiques sur l'optimisation Lagrangienne. Le plus connu en analyse d'image est celui de Mumford et Shah [20] [19], où ω_φ est un terme d'attache aux données et ω_∂ un terme de régularisation, généralement les périmètres de classes, l'un et l'autre composés linéairement pour les p.p.

Dans un texte séminal, et bien antérieur à [20], H. Everett étudie la question de la répartition optimale entre ressources et allocataires de ressources [13]. Il démontre le résultat suivant, transposé ici dans nos termes et notations:

9 *Etant donné une tresse B , un multiplicateur $\lambda \geq 0$, un coût C , et le lagrangien*

$$\omega(\lambda, \pi) = \left\{ \sum_{S \in \pi} \omega_\varphi(S) + \lambda \sum_{S \in \pi} \omega_\partial(S) \right\},$$

la coupe $\bar{\pi}(\lambda)$ d'énergie $\omega(\lambda)$ minimale est aussi la coupe d'énergie ω_φ minimale vérifiant $\omega_\partial(\bar{\pi}(\lambda)) \leq C$, à condition que C soit égal à l'une des énergies $\omega_\partial(\pi^(\lambda))$.*

Ce théorème n'assure pas l'unicité. De plus, si la contrainte est une donnée externe, qui n'a aucune raison d'être prise parmi les valeurs $\omega_\partial(\pi^*(\lambda))$, $\lambda \geq 0$, on peut encore trouver des coupes conditionnellement minimales, mais ce ne sont plus forcément des $\pi^*(\lambda)$, et il peut y en avoir des quantités. On trouvera dans [22], sect. 2.3.1, ou dans [30] un contre exemple simple et très parlant.

6.1 Lagrangiens dans les treillis énergétiques

Peut-on remédier à ces deux points faibles en reformulant l'optimisation conditionnelle dans le cadre des treillis énergétiques? Les trois axiomes de base (singularité, h -croissance et croissance d'échelle) sont nécessaires, mais ici la structure assez particulière de l'équation (11) donnant $\omega(\lambda)$ permet d'exprimer croissance d'échelle sous la forme plus simple de l'inf-modularité, qui ne fait plus intervenir les λ (sect. 1.8 dans [22] ou 4.2 dans [30])

10 *Une énergie $\omega_\partial : \mathcal{D}(E) \rightarrow \mathbb{R}^+$ sur les partitions partielles est inf-modulaire quand pour chaque p.p. $\pi(S)$ de support $S \in \mathcal{P}(E)$ on a*

$$\omega_\partial(\{S\}) \leq \omega_\partial[\pi(S)],. \tag{12}$$

ce qui implique $\omega_\partial(\{S\}) \leq \wedge \omega_\partial[\pi(S)]$ quand $\pi(S)$ parcourt l'ensemble des p.p. de support S .

On introduit alors comme familles de Lagrange les énergies $\{\omega(\lambda) = \omega_\varphi + \lambda\omega_\partial\}$, où $\omega(\lambda)$, ω_φ , et ω_∂ sont grimpantes, et où de plus ω_∂ est inf-modulaire. Sous ces hypothèses, si dans le théorème 9 l'on remplace $\bar{\pi}(\lambda)$ par la coupe minimale $\pi^*(\lambda)$ du treillis $\Pi(\omega^\lambda, B)$, cette coupe $\pi^*(\lambda)$ devient aussi la coupe minimale du treillis énergétique $\Pi(\omega_\varphi, B)$, sous la même contrainte relative à C , et elle est alors unique (modèle LMCC, sect. 2.9 dans [22] ou sect. 6 dans [30]).

Lorsqu'on accepte de limiter les valeurs de C aux $\omega_\partial[\pi^*(\lambda)]$, ce qui se traduit par certaine imprécision sur l'énergie, l'optimisation devient alors exacte et unique, comme c'est le cas pour les deux exemples de la section 3 plus haut.

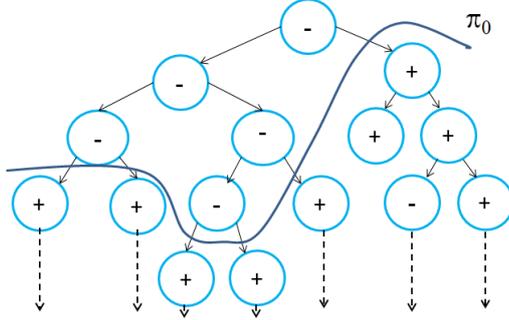


Figure 9: Coupe minimale π_k . Les classes S marquées + vérifient $\omega_\partial(S) > k$, celles marquées - vérifient $\omega_\partial(S) \leq k$.

7 Minimisation par classes contraintes

Nous résumons ici la section 2.10 de [22]. La méthode du lagrangien pose problème parce qu'on fait porter la contrainte C sur les énergies globales des coupes. Cherchons à revenir à l'intuition initiale de Lagrange et d'Euler, qui consistait à remplacer un minimum conditionnel par un autre, absolu, en changeant d'espace.

Nous partirons d'une hiérarchie H , et de deux énergies ω_φ et ω_∂ grimpantes avec ω_∂ inf-modulaire, comme précédemment. La minimisation peut s'énoncer dans les termes suivants:

11 *Etant donné un coût C , trouver la (ou les) coupes de H of d'énergie ω_φ minimale, conditionnellement à ce que toutes ses classes S vérifient $\omega_\partial(S) \leq C$.*

Pour ce faire, nous allons générer une nouvelle hiérarchie H' où la minimisation selon ω_φ n'est plus conditionnée. Soit $\mathcal{A}(C)$ l'ensemble des coupes π de H dont les énergies de toutes les classes sont $\leq C$:

$$\pi \in \mathcal{A}(C) \Leftrightarrow \{S \sqsubseteq \pi \Rightarrow \omega_\partial(S) \leq C\}. \quad (13)$$

Le problème est, bien sûr, faisable si et seulement si $\mathcal{A}(C)$ n'est pas vide, et alors $\mathcal{A}(C)$ est une famille stable pour l'intersection, de plus petit élément

$$\pi_0 = \wedge \{\pi, \pi \in \mathcal{A}(C)\}. \quad (14)$$

Les classes de π_0 s'interprètent comme les feuilles d'une nouvelle hiérarchie H' , identique à H au dessus et sur π_0 , mais dont toutes les classes sous π_0 ont été enlevées (voir figure 9). Les coupes π de H' sont exactement celles de H qui vérifient la contrainte $\omega_\partial(\pi) \leq C$.

De plus, comme ω_∂ est inf-modulaire, la coupe maximale dans le treillis $\Pi(\omega_\partial, H')$ coïncide avec la coupe minimale π^* du treillis $\Pi(\omega_\varphi, H)$ telle que $\omega_\varphi(\pi^*) \leq C$. Le problème se ramène donc à trouver la coupe minimale de H' relativement à l'énergie ω_φ , une question que nous savons traiter.

7.1 Combinaisons logiques de contraintes

Lorsque plusieurs contraintes entrent en jeu, la minimisation de ω_φ dépend de p énergies ω_{∂_j} et p coûts C_j , $1 \leq j \leq p$. Comme ω_∂ est inf-modulaire, l'intersection (resp. l'union) logique des p contraintes équivaut une condition unique $\geq \vee\{C_j, 1 \leq j \leq p\}$ (resp. $\leq \wedge\{C_j, 1 \leq j \leq p\}$), ce qui nous ramène au cas scalaire. On remarquera que la situation où une contrainte au moins est vérifiée ne peut pas être traitées dans le cadre lagrangien.

Les cas de figure multi-contraintes apparaissent entre autres dans l'étude des images multi-spectrales [3] [32] [33], ou simplement en imagerie en couleurs.

8 Hiérarchies et vérité terrain

Cette section, qui résume le chapitre 4 de [22] ainsi que les publications [21] [23] concerne la question de savoir comment rajouter une information externe à une hiérarchie de segmentations. Le problème se pose entre autres lorsque des dessins manuels sont associés à l'image qu'on étudie, comme dans la base "*Berkeley Segmentation Datas and Benchmark*". Nous nous placerons dans les conditions suivantes

- 1/ l'espace E est le plan euclidien,
- 2/ \mathbb{R}^2 est partitionné en classes connexes de contours des courbes de Jordan,
- 3/ il existe une plus petite segmentation, localement finie, qui forme les feuilles.

8.1 Réseaux de Jordan et composition de hiérarchies

Définissons comme réseau de Jordan, ou J-réseau N , tout ensemble de courbes de Jordan qui délimitent un nombre localement fini d'intérieurs ouverts connexes (plus l'ensemble vide). Les feuilles définissent entre autres le réseau de Jordan N_0 . L'ensemble $\mathcal{N}(N_0)$ des J-réseaux inclus dans N_0 forme un treillis complét d'éléments extrêmes \emptyset et N_0 , où le supremum de la famille $\{N_j\}$ est la réunion $\cup N_j$ et l'infimum la réunion $\gamma(\cap N_j)$ de toutes les courbes de Jordan communes à tous les N_j . L'opération $N_j \rightarrow \gamma(\cap N_j)$ est une ouverture algébrique.

Considérons maintenant une hiérarchie de feuilles les classes séparées par N_0 . lorsqu'on s'élève dans la hiérarchie, apparaît un niveau où tel arc de N_0 disparaît. Ces niveaux, une fois reportés sur leurs arcs respectifs définissent une fonction numérique, dite la saillance [25], qui caractérise la hiérarchie, parce que les classes sont connexes. Une saillance est donc une fonction numérique g du plan dont toutes les section horizontales

$$X_t(g) = \{x \mid x \in N_0, g(x) \geq t\}$$

sont des j-réseaux. Par conséquent,

12 Soit H une hiérarchie sur N_0 de saillance s , et soient g_1 et g_2 deux fonctions positives ou nulles sur \mathbb{R}^2 , alors:

i) $\gamma(s \vee g_1)$ (resp. $\gamma(s \wedge g_1)$) est la plus grande saillance inférieure ou égale $s \vee g_1$ (resp. $s \wedge g_1$),

ii) si g_1 est elle même une saillance sur N_0 , le supremum $g_1 \vee s = \gamma(g_1 \vee s)$ est à on tour une saillance,

iii) $\gamma(g_1) \vee \gamma(g_2)$ est la plus petite saillance supérieure ou égale à $\gamma(g_1)$ et à $\gamma(g_2)$,

iv) si $g_1 \otimes g_2$ désigne opération telle que, $+$, $-$, \times , \div , \vee , or \wedge , alors $\gamma(g_1 \otimes g_2)$ est la plus grande saillance inférieure ou égale $g_1 \otimes g_2$, et $\gamma(g_1 \vee g_2) \leq \gamma(g_1 + g_2)$.

Dans tous les cas la saillance résultante, donc la hiérarchie résultante, est unique.

8.2 Deux exemples

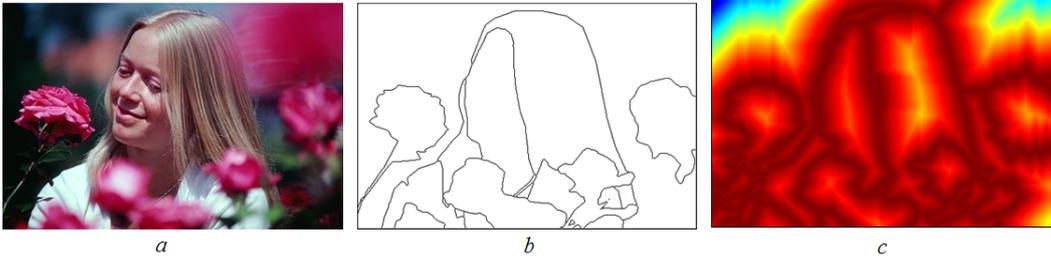


Figure 10: a) image initiale de la base de Berkeley; b) contours manuels fournis avec l'image initiale; c) inverse g de la fonction distance du contour b).

Contours manuels additionnels L'image initiale est la photographie de la jeune fille, en figure 10a, à laquelle on a joint, en figure 10b, un contour dessiné manuellement par un observateur, et en figure 10c l'inverse g de la fonction distance du point courant au contour.

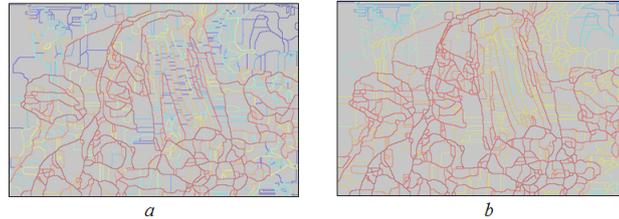


Figure 11: a) Saillance s d'une hiérarchie de LPE de l'image initiale; b) saillance transformée $s_1 = \gamma(s + g)$

On associe à l'image initiale une hiérarchie de LPE, qui est représentée au moyen de sa fonction de saillance s de la figure 11a. Pour donner plus de poids aux classes proches du contour manuel, on ajoute à s la fonction g , ce qui ne donne pas de saillance en général. Mais d'après le théorème 12 la fonction $s_1 = \gamma(s + g)$ est la plus grande borne inférieure de $s + g$, c'est elle qui est représentée en figure 11a où les détails un peu loin des traits de contour sont affaiblis.

Obtention d'un moniteur de tresses Une ligne de partage des eaux segmente l'image. Pour établir une hiérarchie, on regroupe les classes tout d'abord selon leur surface (b), puis

leur volume (c). D'où deux hiérarchies. La première a pour saillance s_1 , la seconde s_2 , et leur réunion qui engendre une tresse. La hiérarchie H du moniteur, de saillance s , est obtenue par au moyen de l'ouverture γ portant sur l'infimum des saillances, soit $\gamma = \gamma(s_1 \wedge s_2)$ puisqu'aussi bien tout contour dans H doit appartenir à chacune des deux hiérarchies de départ.

Figure 12: *a) Image initiale (de la base de Berkeley), b) et c) hiérarchies de LPE par comblage de classes selon leur surface (b), ou leur volume (c). Les hiérarchies sont représentées par leurs saillances. c) hiérarchie moniteur de la tresse (b) \cup (c).*

9 Conclusions

Les résultats principaux Ma thèse et les publications qui l'accompagnent proposent un certain nombre de notions nouvelles. Citons l'axiomatique des énergies grimpantes, qui débouche sur la notion centrale, et nouvelle elle aussi, de treillis énergétique. Ces deux concepts autorisent des énergies non linéaires, mais fort utiles en pratique. Puis vient la notion de tresse, nouvelle elle aussi, qui ouvre le champ de l'optimisation et du filtrage à une large gamme de familles de partitions, donc de problèmes, aux modèles probabilistes, et aux images multispectrales. L'optimisation sous contrainte hors du cadre lagrangien, ouvre elle aussi des horizons nouveaux en ce qu'elle permet de spatialiser les contraintes, et d'établir des solutions exactes. Enfin, les lois de compositions des hiérarchies entre elles et avec des fonctions de l'espace, via les saillances, est aussi un apport original.

Les trois infinis Dans les treillis énergétiques, l'infini peut se manifester de trois manières. Tout d'abord par le nombre des niveaux d'une hiérarchie. Supposé fini dans la thèse, peut s'il s'accroître indéfiniment, jusqu'au non dénombrable? Probablement pas, car trop de résultats importants sont liés aux relations pères/fils. Le second infini est celui de l'espace E . La démarche impose qu'il y ait une partition minimale de E , les feuilles, dont le nombre est supposé localement fini. En fait, le formalisme des treillis se prête bien aux \vee et \wedge de familles non dénombrables d'opérandes, mais nous n'avons pas exploré cette direction. Le troisième infini enfin est celui de l'espace. Dans des domaines aussi différents que la télédétection ou la microscopie optique, la zone Z qu'on analyse est très petite par rapport à l'objet d'étude. Un champ de 50 microns pour une coupe de rein, c'est aussi peu que 5 km de large comparés à la taille de l'Europe. On voit mal comment à partir d'une énergie globale, et qui porte sur un continent entier, on pourrait arriver à formuler regionalement la question de l'optimisation et encore moins la résoudre. Le treillis énergétique permet, lui, de traiter cette question d'effets de bords (en attribuant une énergie infinie aux classes qui ne sont pas contenues dans Z en prenant l'infimum des énergies des divers champs).

Ce qui n'a pas été reporté ici Dans ce résumé, j'ai volontairement passé sous silence les démonstrations et le détail des algorithmes, ces démonstrations de l'informatique. Concernant les LPE, j'ai utilisé, selon le cas l'un ou l'autre des deux algorithmes de J.Cousty [12] ou de

P.Arbeláez [4], et rédigé personnellement les autres algorithmes. Rien n'est dit non plus sur les mesures de qualité comparatives entre méthodes, ni sur la bibliographie des sujets abordés, qu'on trouvera dans le texte de la thèse. J'ai préféré insister sur l'histoire des idées, et sur les deux lignées

Lagrange/Euler → Everett → Mumford/Shah → Salembier/Garrido → Guigues et Al.
Breiman et Al. → Salembier/Garrido → Guigues et Al.

dont la thèse relève directement.

Travaux en cours Une thèse résout certains problèmes, mais elle en pose d'autres. Par exemple celui-ci. Si l'on vous donne une centaine de partitions, il est assez facile de vérifier qu'elle proviennent d'une même tresse, même si le faire vite est moins simple. Mais trouver la tresse, ou même la hiérarchie minimale à l'origine des cent partitions est une vraie gageure, que je tente actuellement de résoudre.

Quelques parents On entrevoit des ponts qui devraient relier la théorie des tresses et ses optimisations avec d'autres méthodes comme les graphes d'intersection ou encore les "graph cuts" [4], [16]. Ces liens sont signalés dans le chapitre 5 de la thèse, mais méritent des études plus approfondies. La même remarque s'applique à la compression par ondelettes, qui est une méthode hiérarchique. Elle s'applique aussi à certaines théories de l'apprentissage [5] qui font un grand usage de la sub-modularité, notion voisine du concept d'inf-modularité.

Problèmes ouverts Au delà de ces parents proches, se dessine la nébuleuse plus vaste de tous les domaines de la physique qui ont recours à des minimisations de type Lagrange, comme certains problèmes de mécanique par exemple, pour laquelle notre démarche ouvrira peut être des perspectives nouvelles.

References

- [1] Akcay, H.G., Aksoy, S.: Automatic detection of geospatial objects using multiple hierarchical segmentations. *IEEE T. Geoscience and Remote Sensing* 46 (2008) pp.2097-2111
- [2] Angulo, J., Jeulin, D.: Stochastic watershed segmentation. In: Banon, G.J.F., Barrera J., Braga-Neto, U.d.M., Hirata, N.S.T. (eds.) Proceedings, (ISMM), Rio de Janeiro. vol. 1, pp. 265-276. INPE (Oct 2007)
- [3] Noyel G., Angulo J., Jeulin D. :A New Spatio-Spectral Morphological Segmentation For Multi-Spectral Remote-Sensing Images, *International Journal of Remote Sensing* 31, 22, pp.5895-5920 (2010)
- [4] Arbeláez, P., Maire, M., Fowlkes, C., Malik, J.: Contour Detection and Hierarchical Image Segmentation. *IEEE PAMI* 33 (2011)

- [5] F. Bach: Learning with Submodular Functions: A Convex Optimization Perspective. *Foundations and Trends in Machine Learning*, 6(2-3):145-373, 2013.
- [6] E T Bell, "Exponential numbers," in *The American Mathematical Monthly*, vol. 41, pp. 411–419, 1934.
- [7] Benzécri J. P., *L'Analyse des Données. Tome I : La Taxinomie*. Dunod, Paris, 4ème edition, 1984.
- [8] Breiman, L., Friedman, J.H., Olshen, R.A., Stone, C.J.: *Classification and Regression Trees*. Wadsworth (1984)
- [9] Boyd S., Vandenberghe L. *Convex optimization* Cambridge University Press, 2004
- [10] Boykov Y., Veksler O., Zabih R.: Fast Approximate Energy Minimization via Graph Cuts. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.* 23(11): 1222-1239 (2001)
- [11] Ballester, C., Caselles, V., Igual, L., Garrido, L.: Level lines selection with variational models for segmentation and encoding. *Journal of Mathematical Imaging and Vision* 27(1), 5{27 (2007)
- [12] Cousty, J., Najman, L.: Incremental Algorithm for Hierarchical Minimum Spanning Forests and Saliency of Watershed Cuts. In: Soille, P., Pesaresi, M., Ouzounis, G.K.(eds.) *ISMM 2011. LNCS, vol. 6671* Springer, Heidelberg (2011) 272–283
- [13] H. Everett Generalized Lagrange Multiplier Method for Solving Problems of Optimum Allocation of Resources, *Operations Research* 11, (3) 399-417,1963.
- [14] Guigues L., *Modèles multi-échelles pour la segmentation d'images*.Thèse doctorale Université de Cergy-Pontoise, décembre 2003.
- [15] Guigues L., Cocquerez J.P., Le Men H., Scale-Sets Image Analysis, *Int. Journal of Computer Vision* 68(3), 289-317, 2006.
- [16] Kappes, J.H., Speth, M., Andres, B., Reinelt, G., Schnörr, C.: Globally optimal image partitioning by multicuts, in: Boykov, Y., Kahl, F., Lempitsky, V., Schmidt, F. (Eds.), *Energy Minimization Methods in Computer Vision and Pattern Recognition*. Springer Berlin Heidelberg. volume 6819 of Lecture Notes in Computer Science, pp.31–4
- [17] Matheron, G. *Random Sets and Integral Geometry*. Wiley, 1975.
- [18] Meyer F. Beucher S. Morphological Segmentation. *J.of Visual Communication and Image Representation*, 1990, Vol.1 (1), pp.21-46.
- [19] Morel, J. M. and Solimini, S. *Variational methods in image segmentation*.Birkhauser Boston Inc., Cambridge, MA, USA, 1995.
- [20] Mumford D. and Shah J., Boundary Detection by Minimizing Functionals, in *Image Understanding*, S. Ulmann and W. Richards Eds, 1988.

- [21] Kiran, B. R. and Serra, J. Scale space operators on hierarchies of segmentations. In Kuijper, A., Bredies, K., Pock, T., and Bischof, H., editors, *SSVM, Vol. 7893 of Lecture Notes in Computer Science*, pages 331-342. Springer, 2013.
- [22] B.R. Kiran, *Energetic-Lattice based optimization* Phd thesis, Université de Paris-Est, October 2014.
- [23] B. R. Kiran, J. Serra, Fusions of Ground Truths and of hiérarchies of Segmentations, *Pattern Recognition Letters*, 47(0): 63-71, 2014.
- [24] B. R. Kiran, J. Serra: Braid of partitions. *submitted to ISMM 2015*, 2015.
- [25] L. Najman and M. Schmitt, Geodesic saliency of watershed contours and hierarchical segmentation, *PAMI*, 1996, Vol.18, n° 12, pp.1163–1173.
- [26] Ronse, C., Partial partitions, partial connections and connective segmentation. *Journal of Mathematical Imaging and Vision* 32 (2008) 97–125g, 2000.
- [27] Salembier P., Garrido L., Binary Partition Tree as an Efficient Representation for Image Processing, Segmentation, and Information Retrieval. *IEEE Trans. on Image Processing*, 2000.
- [28] Serra J., Hierarchy and Optima, in *Discrete Geometry for Computer Imagery*, I. Debled-Renneson et al.(Eds) LNCS 6007, Springer, pp 35-46, 2011
- [29] Kiran B. R., Serra J., Global-local optimizations by hierarchical cuts and climbing énergies, *Pattern Recognition* 47 pp.12–24, 2014.
- [30] J. Serra, B. R. Kiran, Constrained optimization on hierarchies and braids of partitions *submitted to ISMM 2015*, 2015.
- [31] Soille, P., Constrained connectivity for hierarchical image partitioning and simplification. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 30 pp.1132–1145, 2008.
- [32] Valero, S., Salembier, P., and Chanussot, J. Hyperspectral image representation and processing with binary partition trees. *IEEE Transactions on Image Processing*, 22:1430-1443 2013.
- [33] Veganzones, M., Tochon, G., Dalla-Mura, M., Plaza, A., and Chanussot, J. Hyperspectral image segmentation using a new spectral unmixing-based binary partition tree representation. *IEEE Transactions on Image Processing*, 23(8): 3574-3589, 2014.